Concursul Fractal

A doua Ediție, 8 Decembrie 2024

Problema 1. Viorel afirmă că pentru orice număr natural n mai mare decât 2024, numărul $2024^n + 1$ este prim. Are oare dreptate Viorel?

Soluție: Răspunsul este nu, un exemplu ar fi să vedem că ultima cifră a numărului 2024^{2025} este 4, deci $2024^{2025} + 1$ se împarte fără rest la 5, deci e compus. La fel, e ușor de arătat că numărul $2024^n + 1$ este compus pentru orice n care nu este o putere a lui 2, utilizând factorizarea lui $2024^n + 1$ pentru n impar.

Problema 2. Numerele reale a, b și c sunt astfel încât trinoamele pătratice $ax^2 + bx + c$ și $cx^2 + bx + a$ au fiecare câte două rădăcini reale strict pozitive. Arătați că suma tuturor acestor rădăcini este cel puțin 4.

Soluție: Fie r_1 și r_2 rădăcinile primei ecuații pătratice, adică $ar_1^2 + br_1 + c = 0$. Cum r_1 este nenul, putem împărți la r_1^2 și obținem $a + b\frac{1}{r_1} + c\frac{1}{r_1^2} = 0$. Deci, dacă rădăcinile primei ecuații sunt r_1 și r_2, atunci rădăcinile celeilalte sunt $\frac{1}{r_1}$ și $\frac{1}{r_2}$. Acum, ne rămâne să arătăm că: $r_1 + \frac{1}{r_1} + r_2 + \frac{1}{r_2} \geq 4$, pentru care e suficient să observăm că $x + \frac{1}{x} \geq 2$ pentru orice x pozitiv, din inegalitatea mediilor, sau din restrângerea pătratului.

Problema 3. În triunghiul ABC, fie O centrul cercului circumscris acestuia, și fie H ortocentrul. Fie P centrul cercului circumscris triunghiului BOC și fie Q centrul cercului circumscris triunghiului BHC. Arătați că $OP \cdot OQ = OA^2$.

Soluție: Voi arăta că triunghiurile BPO și QBO sunt asemenea. Inițial, e clar că punctele O, P și Q sunt coliniare, căci aparțin mediatoarei segmentului BC. Notăm cu a măsura unghiului $\angle BAC$. E clar că unghiul $\angle BOP$ are măsura egală cu a. La fel, măsura unghiului $\angle OPB$ poate fi calculată ca fiind jumătate din măsura unghiului $\angle BPC$, care e egal cu $360 - 4a$, căci unghiul $\angle BOC$ are măsura egală cu $2a$. Analog, calculăm măsura unghiului $\angle OQB$, ca fiind a, deci putem observa că cele două triunghiuri sunt isoscele și asemenea, astfel, din asemănare, avem că $\frac{OB}{OP} = \frac{OQ}{OB}$, astfel $OB^2 = OP \cdot OQ$, iar cum O e centrul cercului circumscris, avem $OB = OA$, și deci urmează concluzia.

Problema 4. În colțul din stânga jos al unei table de șah (cu câte 8 rânduri și 8 coloane), se află un rege. Marius și Alexandru joacă un joc, Alexandru merge primul. Pe rând, aceștia mută regele, fie în dreapta, fie în sus, fie în dreapta sus, cu câte exact un pătrățel. Câștigă cel ce duce regele în pătrățelul din colțul din dreapta sus. Cine va câștiga dacă ambii jucători joacă optim?

Soluție: Această problemă are multe soluții, dar cea mai scurtă ar fi să considerăm tabla de șah în care fiecare pătrățel e colorat roșu dacă are ambele coordonate pare și albastru altminteri. Vom arăta că Alexandru poate câștiga, căci începe de pe un pătrățel albastru. Strategia sa va fi, la fiecare mutare, să mute regele pe un pătrățel roșu. E clar că apoi, Marius oricum nu ar muta, ajunge pe un pătrățel albastru, și deci nu va putea câștiga nicicum, căci pătrățelul din colțul din dreapta sus e roșu.